

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Завьяловой Антонины Владимировны «Включения с сюръективными операторами и их приложения»

представленную на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Многие задачи теории дифференциальных уравнений, математической физики, математической экономики и других разделов современной математики сводятся к изучению разрешимости операторных уравнений и включений. Эта проблема изучалась многими авторами и продолжает активно изучаться в настоящее время.

В конце 20-го века в работе В. Риссегі начали изучаться операторные уравнения, содержащие компактные возмущения линейных непрерывных сюръективных операторов. В этой работе не только доказывалась теорема существования решений операторных уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A – линейный непрерывный сюръективный оператор (главная часть), а f – компактное отображение, но и была получена оценка на топологическую размерность множества решений.

В дальнейшем в работах Б.Д. Гельмана были изучены вполне непрерывные возмущения замкнутых линейных сюръективных операторов и рассмотрены приложения полученных теорем к проблеме разрешимости операторных уравнений и включений.

Диссертационная работа А.В. Завьяловой продолжает исследования Б.Д. Гельмана по исследованию операторных включений $A(x) \in F(x)$ в случае, когда A – линейный сюръективный оператор, а F – многозначное возмущение оператора A .

Отметим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Доказаны теоремы о разрешимости и размерности множества решений операторных включений $A(x) \in F(x)$, у которых главная часть A является замкнутым линейным сюръективным оператором, а многозначное возмущение F имеет выпуклые компактные образы и вполне непрерывно относительно этой главной части. Рассмотрены приложения доказанных теорем к изучению множества решений у новых классов вырожденных дифференциальных включений в банаховых пространствах, у которых вырождение задается замкнутым линейным сюръективным оператором.
2. Доказаны теоремы о разрешимости операторных включений $A(x) \in F(x)$, у которых главная часть является непрерывным линейным сюръективным оператором, а многозначное возмущение является уплотняющим относительно этой главной части. Рассмотрены приложения полученных теорем к изучению нового класса вырожденных дифференциальных включений.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на пункты и подпункты, и списка литературы, содержащего 41 наименование. Объем работы составляет 84 страницы.

Опишем коротко содержание диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и приводится краткое содержание работы.

В первом параграфе диссертации приводятся основные сведения из теории многозначных отображений и дифференциальных включений необходимые в дальнейшем. Это: метрика Хаусдорфа и липшицевы многозначные отображения, непрерывные сечения многозначных отображений, измеримые многозначные отображения и многозначный оператор суперпозиции, некоторые сведения о дифференциальных включениях.

Второй параграф диссертации посвящен изучению операторных включений $A(x) \in F(x)$ в случае, когда A - линейный замкнутый сюръективный оператор, а F - многозначное вполне непрерывное возмущение оператора A , и применению доказанных теорем для изучения вырожденных дифференциальных включений и управляемых систем.

В пункте 2.1 изучается разрешимость этих включений и устанавливаются некоторые свойства множества их решений (неограниченность). Основной в этом пункте является теорема 2.1.5, в которой устанавливается разрешимость рассматриваемого включения на шаре банахового пространства.

В пункте 2.2 доказанные теоремы применяются к исследованию существования локальных решений задачи Коши следующей задачи:

$$A(x') \in F(t, x),$$

$$A(x(0)) = A(x_0),$$

где A - линейный замкнутый сюръективный оператор, а многозначное отображение F имеет выпуклые компактные образы и вполне непрерывно. В теореме 2.2.2 доказывалось существование локальных решений этой задачи.

В пункте 2.3 изучается топологическая размерность множества решений операторных включений, полученные результаты применяются для изучения топологической размерности множества локальных решений этой задачи. В теореме 2.3.9 доказывалось, что если размерность ядра $\text{Ker } A \geq 1$, то топологическая размерность множества локальных решений этой задачи равна ∞ .

Пункт 2.4 посвящен изучению управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями. Рассматривается следующая задача:

$$(Ax)'(t) = g(t, x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in U(x)(t) \text{ для любого } t \in [0, T],$$

$$A(x_0) = Ax_0.$$

При некоторых (достаточно естественных) условиях доказывается существование решений этой задачи на промежутке $[0, T]$.

Третья глава диссертации посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В ней доказываются некоторые теоремы о разрешимости включений $A(x) \in F(x)$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а F – уплотняющее многозначное возмущение оператора A .

Пункт 3.1 является вспомогательным, в нем приведены некоторые свойства многозначных уплотняющих отображений и формулируется теорема о неподвижной точке для ψ -уплотняющего многозначного отображения.

В **пункте 3.2** этой главы приводится (следуя статье Б.Д. Гельмана и С.Н. Калабуховой) определение меры некомпактности, индуцированной оператором A . В этом пункте дается определение, приводятся примеры и изучаются свойства (A, ψ) -уплотняющих многозначных отображений.

В **пункте 3.3** изучается разрешимость включений $A(x) \in F(x)$ в случае, когда A является непрерывным сюръективным оператором, а F – многозначным (A, ψ) -уплотняющим отображением. Доказана локальная теорема существования решения (теорема 3.3.1).

В **пункте 3.4** теорема 3.3.1 применяется для доказательства теоремы существования решений задачи Коши у одного нового класса вырожденных включений в банаховом пространстве.

Таким образом, диссертация Завьяловой А.В. является законченным научным исследованием. В ней получены новые интересные результаты о разрешимости операторных включений в банаховых пространствах, которые, несомненно, относятся к нелинейному функциональному анализу. Все основные результаты диссертации своевременно и полно опубликованы в восьми печатных работах автора, три из которых соответствуют списку ВАК РФ. Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание.

Можно отметить следующие недостатки в работе:

- 1) работа содержит опечатки, но их немного;
- 2) в лемме 2.1.4 (об эквивалентности двух включений (2.1) и (2.2)) сначала утверждается, что каждое решение включения (2.2) является решением включения (2.1), а доказывается обратное включение. А только после этого доказывается, что каждое решение включения (2.2) является решением включения (2.1);
- 3) представляется, что условие дополняемости $\text{Ker } A$ в теореме 2.3.9 является излишним, однако, это скорее пожелание для дальнейших исследований.

Указанные недостатки не умаляют научной ценности данной работы. Диссертация А.В. Завьяловой «Включения с сюръективными операторами и их приложения» представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, выполненную на высо-

ком научном уровне. Все основные результаты диссертации являются новыми, строго доказанными и научно обоснованными.

Диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям п.9 Положения ВАК РФ о порядке присуждения ученых степеней, и ее автор Завьялова Алголина Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор

А.В. Арутюнов

20.03.2014

Ложина
Зав. кафедрой
В.М. Крылова

